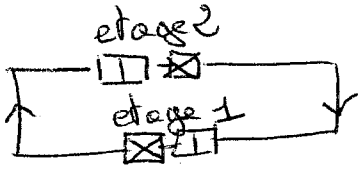
CF2-NET3502-Files d'Attentes

Monique Becker

3 juin 2008

Aucun document autre qu'un polycopié de cours non annoté n'est autorisé. Calculettes et téléphones sont interdits

Cours : (4 points) Donner en une vingtaine de lignes votre façon de voir la différence entre une chaîne de Markov à Temps Discret et une Chaîne de Markov à Temps Continu.
Donner (en moins de 5 lignes pour chaque exemple) deux exemples : l'un de CMTC et l'autre de CMTD.



Exercice 1: (4 points) On considère un modèle fermé cyclique dans lequel M objets circulent entre 2 étages différents. Dans chaque étage ils reçoivent un service d'un serveur exponentiel.

1- On veut calculer la probabilité d'avoir k objets dans l'étage 1.

Combien a-t-on d'objets dans l'étage 2 s'il y a k objets dans l'étage 1 ?
Montrer que le nombre d'objets dans l'étage 1 est un processus de Markov à Temps continu dont on décrira les taux de transition possibles.
Ce processus est-il ergodique ? Si la réponse dépend d'un seuil, indiquer le seuil.
Calculer les limites stationnaires, si elles existent, des probabilités d'état.
En déduire l'espérance du temps mis par un objet pour faire un cycle : (étage1 – étage 2)

2- Connaissez vous un théorème sur les réseaux de files d'attente qui pourrait être appliqué à condition de faire quelques hypothèses supplémentaires.

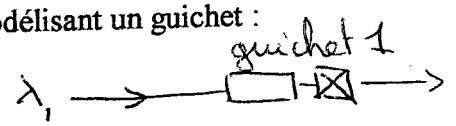
Quelles sont ces hypothèses ?
Donner en ce cas les probabilités d'états et l'espérance du temps de cycle.

3- On voudrait calculer directement les temps de cycle, sans exprimer les probabilités d'états. Connaissez vous un moyen pour faire cela ?

Montrer que cette méthode donne le même résultat que les méthodes précédentes.

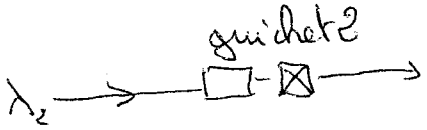
Application numérique :
M=5, μ_1=1service/mn, μ_2=2services/mn

Exercice 2 : (8 points) On considère une banque comportant 2 guichets différents. Le premier traite des opérations assez longues. Le deuxième traite des opérations rapides. Les clients se dirigent vers le guichet correspondant à leur besoin, font la queue, reçoivent un service avant de quitter la banque. Les serveurs sont bavards et lorsque un des deux guichets se trouve vide, donc le serveur est disponible, ce serveur bavarde avec l'autre serveur et ralentit donc la vitesse de service de ce dernier. Ce système peut être modélisé par deux files d'attente « couplées », chacune modélisant un guichet :



$\mu_1(0) = \mu_1$

$\mu_1(n_2) = \alpha\mu_1$ si $n_2 \neq 0$



$\mu_2(0) = \mu_2$

$\mu_2(n_1) = \beta\mu_2$ si $n_1 \neq 0$

On suppose que les processus d'arrivée de clients à chacune des deux files d'attente sont Poissoniens de taux respectifs λ_1 et λ_2. Les processus d'arrivée aux 2 files sont indépendants. Les serveurs de chacune des deux files sont supposés exponentiels à taux dépendant de l'état. Les deux files d'attente sont dites « couplées », car leur taux de service dépendent de l'état de l'autre file de la façon suivante : le taux de service de la file 1 est μ_1 si la file 2 est vide, $\alpha\mu_1$ sinon ; le taux de service de la file 2 est μ_2 si la file 1 est vide, $\beta\mu_2$ sinon.

1 – Quelles valeurs peuvent prendre α et β compte tenu de l'énoncé du problème ?

2 – Peut-on appliquer le théorème de Jackson pour résoudre ce modèle ? Justifier votre réponse.

3 – Peut-on décrire ce système à l'aide d'une CMTC ? Justifier votre réponse.

Afin de simplifier, dans un premier temps l'étude de ce système, on va supposer que les deux files d'attente sont à capacité limitée à un seul client. Tout client arrivant alors qu'il y a déjà un client en service, est rejeté et quitte le système.

4 – Donner la chaîne de Markov décrivant le comportement de ce système.

5 – Ecrire les équations d'équilibre. Peut-on toujours résoudre ces équations ? Justifier.

6 – Résoudre ces équations pour $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

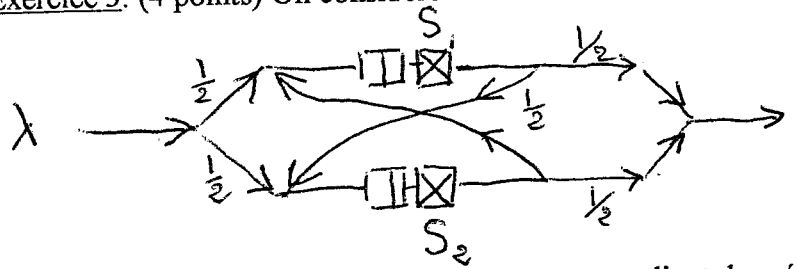
On suppose maintenant que les deux files sont à capacité illimitée.

7 – Sans essayer de représenter la chaîne de Markov, donner les équations d'équilibre de ce système. Peut-on toujours résoudre ces équations ? Ne pas les résoudre.

On supprime maintenant le couplage entre les deux files. Le taux de service de la file1 (resp. de la file 2) est $\alpha\mu_1$ (resp. $\beta\mu_2$) quel que soit l'état de la file 2 (resp. de la file 1).

8 – Donner, lorsque les deux files d'attente sont à capacité illimitée, la solution stationnaire du système et sa condition de stabilité.

Exercice 3: (4 points) On considère le réseau ouvert suivant recevant et traitant des messages :



Calculer les nombres moyens de passages pour un client donné dans chaque file.

On suppose que le temps moyen entre deux arrivées de messages est 20µs, que le temps moyen de traitement par le serveur 1 est $S_1 = 15\mu s$, que le temps moyen de traitement par le serveur 2 est $S_2 = 5\mu s$.

On désire augmenter au maximum le débit d'entrée. Quelle est la limite supérieure ?

Pensez vous que ce réseau soit bien équilibré ?

Avez-vous une modification à proposer ?

1er contrôle écrit de Files d'attente (15 Mars 2008 – durée 3H)

Monique BECKER et André-Luc BEYLOT

(aucun document autre que le poly de cours non annoté n'est autorisé, polys d'exercices et calculettes interdits)

COURS : Une file d'attente avec plusieurs serveurs exponentiels de même taux (4 points)

Quel est le taux de service de la file équivalente ? Démontrez le rigoureusement.

EXERCICE 1 : Sécurisation des liens SDH (10 points)

Dans les réseaux SDH maillés (topologie quelconque, liens interconnectés par des brasseurs), on propose de fiabiliser les chemins (normaux) en proposant des chemins de secours. Cette fiabilisation peut être réalisée 1:1 : un chemin de secours pour un chemin normal ou m:n : n chemins de secours sont partagés entre m chemins normaux. Pour que le système soit pleinement efficace on suppose les chemins disjoints et les pannes indépendantes les unes des autres.

1 On suppose que la durée de bon fonctionnement d'un chemin suit une loi exponentielle de taux λ et les réparations une loi exponentielle de taux μ. Tous les chemins (y compris ceux de secours) peuvent tomber en panne. On suppose qu'un chemin normal peut être secouru par un chemin de secours (les données sont alors envoyées sur celui-ci), qui s'il tombe à son tour en panne, peut être secouru par un autre chemin de secours. Quand la réparation est terminée, on renvoie les données sur le chemin initial.

On veut déterminer la probabilité p qu'un chemin utilisé pour transférer des données tombe en panne et que l'on ne trouve pas de chemin de secours. L'opérateur se doit de garantir une probabilité faible que cet événement survienne.

1.1 On note N(t), le nombre de chemins (normaux ou de secours) en fonctionnement à t. Vérifier que (N(t), t≥0) constitue une chaîne de Markov à temps continu de type processus de naissance et de mort dont on déterminera les taux de transition. Tracer le graphe associé.

1.2 On va calculer les probabilités stationnaires d'état de deux façons.

- en raisonnant sur chaque chemin individuellement
- en résolvant la chaîne de Markov N(t)

Vérifier que les probabilités stationnaires sont de la forme:

$$\pi_k = C_{m+n}^k \tau^k (1-\tau)^{m+n-k}$$

Déterminer τ.

Montrer que les deux méthodes donnent le même résultat.

1.3 Déterminer les états dans lesquels les pannes conduisent à une impossibilité de trouver un chemin de secours (on parle alors de blocage). Pourquoi le taux de blocage n'est-il pas simplement égal à la somme des probabilités de ces états ?

1.4 On raisonne alors en terme de débit. Déterminer le débit de pannes des chemins utilisés pour transférer des données. En extraire le débit bloqué. En déduire p. (on exprimera ces quantités en fonction des probabilités stationnaires des différents états).

2 Dans la pratique, les taux de panne des chemins de secours sont généralement plus forts que ceux des chemins normaux. Qu'est-ce qui peut impliquer ce phénomène ? Quel en est l'impact sur l'étude précédente (on ne demande aucun calcul, on veut juste la description de la modification sur les questions 2.1 et 2.3) ?

EXERCICE 2 : Réseaux multiservices (10 points)

L'extension des formules d'Erlang (que nous avons rencontrées en étudiant les probabilités d'état pour M/M/C/C) a été un des progrès essentiel pour la maîtrise des réseaux à commutation de circuits permettant de prendre en charge des connexions nécessitant des débits hétérogènes comme par exemple des réseaux SDH ou RNIS ou bien encore pour mettre en œuvre des politiques d'acceptation de connexions dans des réseaux à commutation de paquets pour lesquels les connexions n'ont pas toutes besoin du même débit.

On se propose donc d'étudier le partage d'un lien entre K types de connexions.

Le lien possède C ressources (1 ressource pourra être un débit élémentaire à 64 Kb/s ou un canal d'un réseau GSM, ...).

Le trafic est caractérisé de la façon suivante :

- Les connexions de type i constituent un processus de Poisson de paramètre λ_i
- Leur durée suit une loi exponentielle de taux μ_i
- Elles nécessitent b_i ressources.

On note $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ la charge de trafic de type i.

1. Exprimer la charge normalisée du système.

Plusieurs solutions de partage du lien peuvent être mises en place. Nous allons étudier 2.

2. La première intitulée Complete Partitionning consiste à dédier D_i ressources aux connexions de type i, non partageables et de telle sorte que $\sum_{i=1}^{K} D_i = C$. Vérifier que les modèles que nous obtenons sont de type M/M/C/C et

que les probabilités de rejet de chaque type de connexions s'obtiennent simplement en utilisant une formule d'Erlang dont on déterminera les paramètres.

La deuxième solution est la solution de partage complet ou Complete Sharing. Toutes les ressources sont partagées entre tous les types de connexions. Une connexion de type i sera refusée si, à son arrivée, le système ne dispose pas de b_i ressources nécessaires.

On note $N_i(t)$ le nombre de connexions de type i présentes dans le système.

3. Vérifier que le vecteur $(N(t)=(N_1(t),\cdots,N_i(t),\cdots,N_K(t)),t\geq 0)$ est une chaîne de Markov à temps continu. A quelles conditions un vecteur $n=(n_1,\cdots,n_i,\cdots,n_K)$ appartiendra-t-il à l'espace d'états Ω.
4. A quelles conditions la chaîne sera-t-elle ergodique ?
5. On veut démontrer que la distribution stationnaire est de la forme :

$$\pi_n = G\prod_{i=1}^{K}\frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} \quad (1) \qquad \text{où } G \text{ est une constante de normalisation.}$$

5.1. Pour ce faire, vérifier que les équations d'équilibre global sont de la forme :

$$\pi_n\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i 1_{\{n_i^+\in\Omega\}}+\sum_{i=1}^{K}n_i\mu_i 1_{\{n_i^-\in\Omega\}}\right)=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i 1_{\{n_i^-\in\Omega\}}\pi_{n_i^-}+\sum_{i=1}^{K}(n_i+1)\mu_i 1_{\{n_i^+\in\Omega\}}\pi_{n_i^+} \qquad (2)$$

où : $n_i^+=(n_1,\cdots,n_i+1,\cdots,n_K)$, $n_i^-=(n_1,\cdots,n_i-1,\cdots,n_K)$ et 1 est la fonction indicatrice :

$$1_{\{n\in\Omega\}}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad n\in\Omega\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

5.2. Vérifier que la distribution proposée (1) vérifie toutes les équations d'équilibre local :

$$\lambda_i 1_{\{n_i^+\in\Omega\}}\pi_n=(n_i+1)\mu_i 1_{\{n_i^+\in\Omega\}}\pi_{n_i^+} \quad (3)$$

En déduire que la distribution proposée est bien la solution des équations (2).

6. On veut désormais déterminer les probabilités de blocage des connexions de chaque type. Pour cela, on note $\Omega_j=\left\{n\in\Omega/\sum_{i=1}^{K}n_i b_i=j\right\}$ l'ensemble des états où j ressources sont occupées et $q_j=\sum_{n\in\Omega_j}\pi_n$ la probabilité marginale que j ressources soient occupées en régime établi.

6.1. Déterminer la probabilité de blocage de chacun des types de trafic Pb_i en fonction des q_j.

Une méthode particulièrement astucieuse a été proposée pour calculer ces probabilités marginales. On va en effet démontrer qu'elles sont de la forme :

$$q_j=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{K}b_i\rho_i q_{j-b_i}1_{\{j-b_i\geq 0\}}$$

6.2. Pour ce faire, repartir des équations (3), en vérifiant que : Si $n_i>0$, $\rho_i\pi_{n_i^-}=n_i\pi_n$.

6.3. En déduire que si $n\in\Omega_j$: $\sum_{i/n_i>0}\rho_i b_i\pi_{n_i^-}=j\pi_n$

6.4. Vérifiez que l'on obtient alors : $\sum_{i=1}^{K}\rho_i b_i\sum_{n\in\Omega_j/n_i>0}\pi_{n_i^-}=jq_j$

6.5. En raisonnant par double inclusion sur les états obtenus, vérifier que l'on obtient bien : $\sum_{n\in\Omega_j/n_i>0}\pi_{n_i^-}=q_{j-b_i}1_{\{j-b_i\geq 0\}}$

7. On va prendre le cas particulier, $C=4$, $\rho_1=1, b_1=2, \rho_2=2, b_2=1$.

7.1. Prendre le cas Complete Partitionning. Quels sont les choix possibles pour D_1 et D_2 ? On prend $D_1=D_2=2$. Commentez ce choix. Déterminer les probabilités de blocage de chaque type de connexion.

7.2. Dans le cas Complete Sharing, exprimer q_1 en fonction de q_0, puis de proche en proche toutes les valeurs des q_i en fonction des q_0. En déduire les probabilités de blocage des deux types de connexion. Que constate-t-on ?

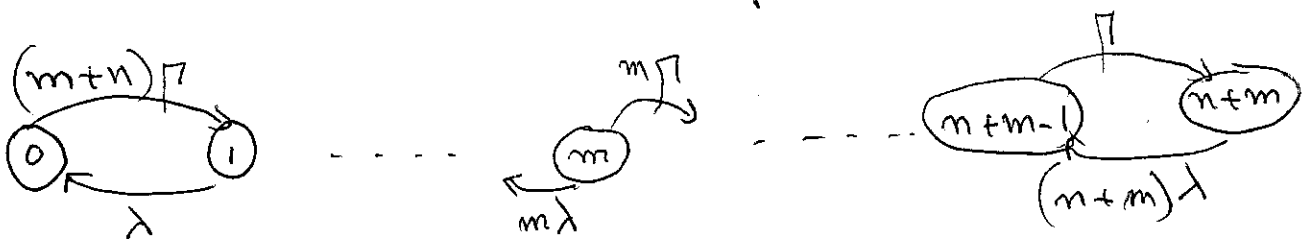
7.3. Comment pourrait-on assurer des probabilités de blocage de connexion qui soient plus équitables entre les deux classes de trafic ?

Correction contrôle 15 Nov 2008

Exercice 1 : Taux de panne λ Taux de réparation Γ

On regarde ce qu'il se passe globalement.

$N(t)$ = nombre de chemins en fonctionnement (nombre de secours)



Le théorème des coupes donne :

$$\Pi_k = \text{Prob}[N(t)=k] = \frac{(m+n)!}{(m+n-k+1)!\,k!}\left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^k \Pi_0$$

$$\rho = \frac{\Gamma}{\lambda} \qquad \Pi_k = C_{m+n}^k \rho^k \Pi_0$$

$$\sum_k \Pi_k = 1 \longrightarrow \Pi_0\left[\sum C_{m+n}^k \rho^k\right] = 1$$

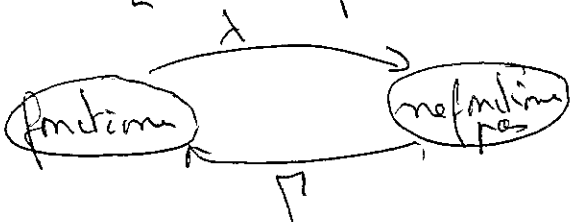
formule du binôme $(1+\rho)^{m+n}$

$$\Pi_0 = \frac{1}{(1+\rho)^{m+n}}$$

$$\boxed{\Pi_k = C_{m+n}^k \rho^k \frac{1}{(1+\rho)^{m+n}}}$$

Autre mode de raisonnement : On considère 1 chemin

τ = Proba [chemin fonctionne] $\quad 1-\tau$ = Proba [chemin ne fonctionne pas]



coupe $\longrightarrow \quad \tau = \frac{\Gamma}{\lambda+\Gamma} = \frac{\rho}{1+\rho}$

Bernoulli (chemins indépendants) $\longrightarrow \quad \Pi_k = C_{m+n}^k \tau^k (1-\tau)^{m+n-k}$

Montrons que ces deux formules sont les mêmes.

$$\frac{p^k}{(1+p)^{m+n}} = \left(\frac{p}{1+p}\right)^k \left(1 - \frac{p}{1+p}\right)^{m+n-k}$$

C'est vrai car le second membre est

$$\left(\frac{p}{1+p}\right)^k \left(\frac{1}{1+p}\right)^{m+n-k} = \frac{p^k}{(1+p)^{m+n-k+k}}$$

13 Une défaillance non réparable se produit dans un état où il y a moins de m chemins qui fonctionnent. On n'a en effet pas besoin de distinguer parmi les chemins, ceux qui correspondent à des chemins normaux ou de secours. S'il y a plus de m chemins qui fonctionnent, on est sûr d'avoir encore une solution de secours. En effet, si l'on note m_1 le nombre de chemins normaux utilisés, m_2 le nombre de chemins de secours qui fonctionnent et qui sont utilisés et m_2 ceux qui fonctionnent et qui ne sont pas utilisés

$m_1 + m_2 = m$ → m chemins fonctionnent et sont utilisés

$m_2 > 0$ (puisque $m_1 + m_2 + m_2 > m$ par hypothèse)

Si un chemin qui fonctionne et n'est pas utilisé tombe en panne, on n'a pas besoin de la

Si l'un des m chemins utilisés tombe en panne, on prend 1 des chemins de secours parmi les m_2 pour le remplacer.

Le taux de défaillance des chemins utilisés n'est malheureusement pas constant : Si $N_1(t) = k < m$: seuls k chemins sont utilisés à t

Si $N_1(t) = k \geq m$: m chemins sont utilisés

$$\Rightarrow \quad p \neq \sum_{k=0}^{m} \pi_k .$$

1.4 : On a déjà le taux de défaillance des chemins utilisés dans l'état k

taux de défaillance $\Lambda = \sum_{k=0}^{m} k \lambda \pi_k + m \lambda \sum_{k=m+1}^{m+n} \pi_k$

Dans les états plus grands que m strictement, on sait trouver un chemin de secours

$$\boxed{p = \frac{\sum_{k=0}^{m} k \pi_k + \cancel{m \sum_{k=m+1}}}{\sum_{k=0}^{m} k \pi_k + m \sum_{k=m+1}^{m+n} \pi_k}}$$

2.3 : . On choisit en priorité pour envoyer les données les chemins les plus fiables

. Les chemins de secours sont en général plus longs (en nombre de sauts par exemple) que les chemins normaux .. ils tombent donc plus facilement en panne.

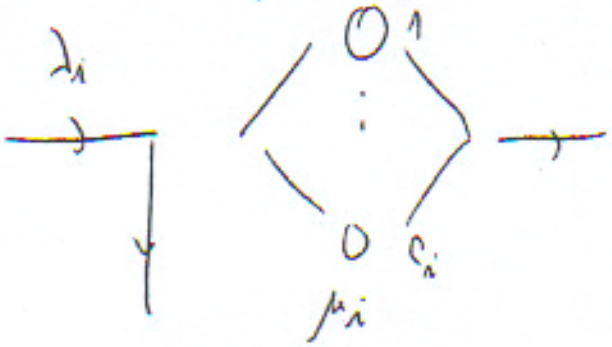
Dans ce cas on aura 2 taux de panne λ_1 et λ_2. Il faut donc conserver $\left((N_1(t), N_2(t)) \; t \geq 0 \right)$ pour retomber sur 1 CMTC.

$$p = \frac{\sum_{n_1, n_2 / n_1 + n_2 \leq m} (n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2) \pi_{n_1, n_2}}{\sum_{n_1, n_2 / n_1 + n_2 \leq m} (n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2) \pi_{n_1, n_2} + \sum_{n_1, n_2 / n_1 + n_2 > m} (n_1 \lambda_1 + (m - n_1) \lambda_2) \pi_{n_1, n_2}}$$

Exercice 2 — Réseaux Multi-services

1. $\rho = \dfrac{\sum_{i=1}^{K} \rho_i b_i}{C}$ ← nbre moyen de ressources nécessaires pour le trafic i

2. Pour le trafic i, on obtient le schéma suivant



$C_i = \left\lfloor \dfrac{D_i}{b_i} \right\rfloor$

C'est une file M/M/C_i/C_i

$$\pi_i = Erl_B(\rho_i, C_i) = \frac{\frac{\rho_i^{C_i}}{C_i!}}{\sum_{k=0}^{C_i} \frac{\rho_i^k}{C_i!}}$$

3. Pr [1 arrivée de type i entre t et $t+dt$] $= \lambda_i\, dt + o(dt)$

Pr [0 "] $: 1 - \lambda_i\, dt + o(dt)$

Cette connexion sera acceptée si $\sum_{j=1}^{K} n_j \cdot b_j + b_i \leq C$

Pr [1 fin de connexion entre t et $t+dt$ (de type i) $/ N_i(t) = n_i > 0$] $= n_i \mu_i\, dt + o(dt)$

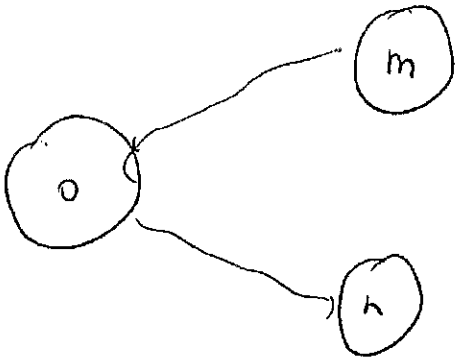
Pr [0 "] $: 1 - n_i \mu_i\, dt + o(dt)$

$n \in \Omega \iff \begin{cases} \forall\, n_i \in \mathbb{N} \\ \text{et } \sum_{i=1}^{K} n_i \cdot b_i \leq C \end{cases}$

4. Un chaîne compte un nombre fini d'états

Dire que le graphe est fortement connexe il faut tout

d'abord que les λ_i et les μ_i soient non nuls (on appel encore de temps en temps et en moyenne fois).



Soient $m \in \Omega$, $n \in \Omega$ et cherchons un chemin de m vers n.

Un peut aller de m vers 0, il suffit que les connexions de chaque type se terminent : $(m_1, m_2, \dots, m_K) \longrightarrow (0, m_2, \dots, m_K) \longrightarrow (0, 0, \dots, m_K)$

↑ tous les états intermédiaires appartiennent à Ω

$\downarrow$

$(0, 0 \dots, 0)$

de la même façon à partir de 0, on peut aller vers n :

$(0, \dots, 0) \longrightarrow (n_2, 0 \dots, 0) \longrightarrow (n_1, n_2, 0, \dots, 0) \longrightarrow (n_1, n_2, \dots, n_K)$

L'espace d'état est dit <u>convexe</u>, si $n \in \Omega$, tout état $n = (p_1, \dots, p_K)$ / $p_1 \le n_2, \dots, p_K \le n_K$ $\in \Omega$.

$$5.1 \qquad \Pi_n \left\{ \sum_{k=1}^{K} \lambda_i \mathbb{1}_{\{n_i^+ \in \Omega\}} + \sum_{i=1}^{K} n_i \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i^- \in \Omega\}} \right)$$

↗ une connexion de type i arrive dans n : il y a de la place

↑ 1 connexion de type i se termine, il faut qu'il y en ait 1

$$= \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbb{1}_{\{n_i^- \in \Omega\}} \Pi_{n_i^-} + \sum (n_i + m_i) \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i^+ \in \Omega\}} \Pi_{n_i^+}$$

Une connexion de type i arrive, on passe de n_i^- à n

On était dans n_i^+ et une connexion de type i s'est finie.

5.2 $\lambda_i \mathbb{1}_{\{n_i^+ \in \mathcal{R}\}} \pi_n = (n_i+1)\mu_i \mathbb{1}_{\{n_i^+ \in \mathcal{R}\}} \pi_{n_i^+}$? (6)

si $n_i^+ \notin \mathcal{R}$ $\quad 0 = 0$

si $n_i \in \mathcal{R}$ $\quad \pi_{n_i^+} = \pi_n \dfrac{\rho_i}{n_i+1}$

$\lambda_i \overset{?}{=} (n_i+1)\mu_i \dfrac{\rho_i}{n_i+1}$ $\quad \rho_i = \rho_i$ OK.

~~L'équation (5.1) a été écrite pour tout état de $\mathcal{R}$~~

~~Dans l'équation (5.1), on a écrit que $\forall n \in \mathcal{R}$~~

$\forall n \in \mathcal{R}$ (3) $\Rightarrow \pi_n \sum_1^K \lambda_i \mathbb{1}_{\{n_i^- \in \mathcal{R}\}} = \sum_{i=1}^K (n_i+1)\mu_i \mathbb{1}_{\{n_i^+ \in \mathcal{R}\}} \pi_{n_i^+}$

On a revu de (3) avec $n = (n_i^-)_i^+ \hookrightarrow n_i^-$ et on a rappelé qu'on a conditionné l'équation (2) pour le fait que $n \in \mathcal{R}$.

Si $n \in \mathcal{R}$ et $n_i^- \in \mathcal{R}$ $\quad \lambda_i \pi_{n_i^-} = n_i \mu_i \pi_n \Rightarrow$ l'équation (2) est vérifiée

6. $\quad Q_{p_j} = \sum_{n \in \mathcal{R}_j} \pi_n \qquad \mathcal{R}_j = \{ n \in \mathcal{R} \,/\, \sum n_i b_i = j \}$

6.1 $\quad \mathbb{P}_{b_i} = \sum_{j=C-b_i+1}^{C} \mathbb{P}_{Q_j}$

Dès qu'il y a $< b_i$ ressources disponibles, la connexion s'met en file

(et la probabilité qu'il y ait moins de b_i ressources disponibles à l'arrivée d'1 connexion est égale à la probabilité qu'il y ait moins de b_i ressources disponibles = PASTA)

6.2 si $n_i > 0$ $\quad \lambda_i \pi_{n_i^-} = n_i \mu_i \pi_n$ (3)

$n \in \mathcal{R}_j$ $\Rightarrow \rho_i \pi_{n_i^-} = n_i \pi_n$

6.3 $\quad \sum_{i/n_i>0} \rho_i b_i \pi_{n_i^-} = \underbrace{\sum_{i/n_i>0} n_i b_i \pi_n}_{=j}$

6.4 : On fait la somme sur tous les états de Ω_j

(on peut intervertir les sommes qui sont finies)

$$\sum_{m \in \Omega_j} \sum_{i / m_i > 0} \rho_i b_i \Pi_{m_i^-} = j \sum_{m \in \Omega_j} \Pi_m$$

$$\sum_{i=1}^{K} \rho_i b_i \sum_{m \in \Omega_j / m_i > 0} \Pi_{m_i^-} = j\, q_j$$

6.5 : Il reste à vérifier que $\sum_{m \in \Omega_j / m_i > 0} \Pi_{m_i^-} = q_{j-b_i} \mathbb{1}_{\{j-b_i \geq 0\}}$

. Si $j - b_i < 0$ cela veut dire qu'un état $m \in \Omega_j$ ne peut pas avoir de consensus de type i en sous $\Rightarrow m_i = 0 \Rightarrow m_i^- \notin \Omega$ $\Pi_{m_i^-} = 0$.

On obtient bien $0 = 0$

. Si $j - b_i \geq 0$ $\quad q_{j-b_i} \mathbb{1}_{\{j-b_i \geq 0\}} = q_{j-b_i} = \sum_{m \in \Omega_{j-b_i}} \Pi_m$

Il reste alors à vérifier que $\sum_{m \in \Omega_{j-b_i}} \Pi_m = \sum_{m \in \Omega_j / m_i > 0} \Pi_{m_i^-}$. Il faut donc vérifier que les ensembles sont identiques

. $\underline{m \in \Omega_j / m_i > 0}$ $\Rightarrow m_i^- = (m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_k) \in \Omega$ (pour que $m_i > 0$)

et $m_1 b_1 + \dots + (m_i - 1) b_i + \dots + m_k b_k = j - b_i$

$\Rightarrow m_i^- \in \Omega_{j-b_i}$

. $m \in \Omega_{j-b_i} \Rightarrow m_i^+ \in \Omega_j$ (et appartient bien à l'espace d'état)

$(m_i^+)_i^- = m$ donc m est bien dans l'ensemble des $m_i^- / m \in \Omega_j$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{k} \rho_i b_i q_{j-b_i} = j\, q_j}$$

7. $C = 4$, $\rho_1 = 1$, $b_1 = 2$, $\rho_2 = 2$, $b_2 = 1$ (8)

7.1 $(4,0)(0,4) \to$ idiot car pas de place pour le trafic 2 ou pour le 1.

$(3,1)$ $(1,3)$ $\Rightarrow$ au moins aussi bête, une des ressources n'est jamais utilisée quand D_1 est impair

$\boxed{(2,2) \Rightarrow \text{seule solution raisonnable}}$

On peut accepter jusqu'à 1 connexion de type 1 et jusqu'à 2 de type 2

$$P_{b_1} = \frac{\rho_1}{1+\rho_1} = \underline{\frac{1}{2}} \qquad P_{b_2} = \frac{\rho_2^2/2!}{1+\rho_2+\rho_2^2/2!} = \frac{2}{1+2+2} = \underline{\frac{2}{5}}$$

7.2

$$q_1 = \frac{1}{1}\left\{ \rho_1 b_1 \cancel{q_{-1} \times \mathbb{1}_{\{-1 \geq 0\}}} + \rho_2 b_2 q_{1-1} \right\} = 2q_0$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left\{ 2 \times q_0 + 2 \times q_1 \right\} = 3q_0$$

$$q_3 = \frac{1}{3}\left\{ 2 \times q_1 + 2 \times q_2 \right\} = \frac{q_0}{3} = q_0 \frac{10}{3}$$

$$q_4 = \frac{1}{4}\left\{ 2 \times q_2 + 2 \times q_3 \right\} = \frac{1}{4}\left\{ 6q_0 + \frac{20}{3}q_0 \right\} = \frac{19}{6}q_0$$

$$q_0\left(1+2+3+\frac{10}{3}+\frac{19}{6}\right) = 1 \Rightarrow \underline{q_0 = \frac{2}{25}}, \quad q_1 = \frac{4}{25}, \quad q_2 = \frac{6}{25}, \quad q_3 = \frac{2}{15}, \quad q_4 = \frac{19}{75}$$

$$P_{b_1} = q_3 + q_4 = \frac{29}{75} < \frac{1}{2}$$

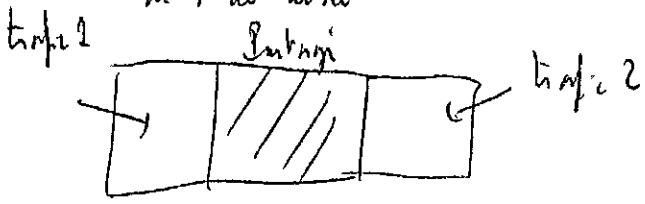
$$P_{b_2} = q_4 = \frac{19}{75} < \frac{2}{5}$$

Les résultats sont meilleurs.

Mais $P_{b_2} \leq P_{b_1} \to$ défavorisé

7.3 + Mécanismes à seuil : On accepte tout le monde jusqu'à un certain seuil. Au delà, on n'accepte que les connexions qui ont besoin de + de débit

+ Trunk Reservation



Contrôle écrit 1ère session de FA12

Monique Becker

20-4-2007

Aucun document autre qu'un polycopié de cours non annoté n'est autorisé
Calculettes et téléphones interdits

Question de cours : (pas plus d'une page) (6points/20)

Donner un exemple de système qu'on rencontre souvent dans les télécoms qui nécessite une modélisation par une file M/G/1 et pas une file M/M/1.
Expliquer en une phrase pourquoi on s'intéresse à la stabilité de cette file. Que signifie stabilité ?
Si vous deviez concevoir un réseau du type que vous avez cité en exemple, quelle condition considéreriez vous comme souhaitable pour obtenir de bonnes performances ? Donner un exemple numérique.

Exercice Auteur Bruno Baynat (4 points/20)

On considère le réseau de files d'attente ouvert totalement symétrique suivant. Le réseau est constitué de M stations à serveurs simples. Toutes les stations ont un temps de service distribué selon une loi exponentielle de taux μ. Chaque station possède une file à capacité illimitée. Le processus d'arrivée des clients dans le réseau est poissonien de taux λ. Un client qui arrive se dirige de façon équiprobable vers l'une quelconque des M stations du réseau. Lorsqu'un client quitte la station i (i = 1, ..., M), il retourne à la station i avec une probabilité p, il va à l'une quelconque des autres stations avec une probabilité q (pour chacune) et il quitte le réseau avec une probabilité r.

1 - Quelle condition doivent satisfaire p, q et r ?

2 - Calculer les taux de visite aux différentes stations.

3 - Pour des valeurs fixées de λ, μ et r, quelle est la valeur minimale de M qui rend le système stable ?

4 - Sous l'hypothèse que le système est stable, déterminer les performances moyennes globales du système : débit moyen du réseau, nombre moyen de clients dans le réseau, temps moyen de séjour dans le réseau.

Problème : Disciplines de service Auteur André-Luc BEYLOT (10 points/20)

Dans la vie de tous les jours aussi bien que dans le domaine des réseaux, la discipline de service la plus communément utilisée est la discipline Premier Arrivé Premier Servi (FCFS). C'est à la fois celle qui semble la plus juste (on supporte difficilement de se faire doubler) mais encore la plus simple à implanter dans des systèmes télécoms par exemple.
Dans le présent exercice, on va s'intéresser au cas d'un centre d'appels qui disposent de C opérateurs.
Les appels sont supposés arriver selon un processus de Poisson de paramètre λ et la durée des appels suit une loi exponentielle de taux μ.
Lorsqu'un appel arrive, s'il l'un des serveurs est disponible, il sera dirigé indifféremment vers l'un d'entre eux. Si tous les serveurs sont occupés, il est mis en attente (on lui indiquera régulièrement de rester en attente). On suppose que l'on peut laisser en attente une infinité d'appels et l'on néglige la probabilité d'abandon en cours d'attente.

PARTIE I – Files à C serveurs

1 Discipline de service FCFS

1.1 Si on suppose que la discipline de service des clients en attente est de type FCFS, donner la notation de Kendall de cette file.

1.2 Vérifier que le nombre d'appels en cours à l'instant t, $\{N_t, t \geq 0\}$ constitue une chaîne de Markov à temps continu de type naissance et mort (on calculera les taux de départs et d'arrivées). Tracer le graphe associé.

1.3 Déterminer les probabilités des différents états en régime permanent. Quelle est la condition de stabilité ?

1.4 En déduire, le nombre moyen d'appels dans le système et le temps moyen de réponse.

1.5 Pour faire patienter l'utilisateur, on veut lui annoncer régulièrement la durée moyenne au bout de laquelle un opérateur va le prendre en charge. Ce type d'information n'a de sens que pour les correspondants qui attendent (cas pour lesquels on a strictement plus de C appels dans la file).
Prenons tout d'abord le cas de l'utilisateur placé en (C+1) ème position (c'est le premier en attente) à un instant t (où on va lui faire une annonce). Quel événement va déclancher sa prise en charge par un des opérateurs ? En déduire le temps moyen au bout duquel il sera pris en charge.
Reprendre le raisonnement pour un client placé en position (C+k).

2 Discipline de service LCFS sans préemption

2.1 Une autre discipline de service que l'on peut implanter dans un tel système est la discipline Dernier Arrivé Premier Service sans préemption, ce qui signifie que quand un nouvel appel arrive et que tous les serveurs sont occupés, au lieu de le positionner à la dernière place de la file déjà formée, on le met à la première place. Il passe donc devant tous les appels arrivés avant lui et qui sont en attente mais il pourra également être dépassé par tous les appels qui arriveront après lui si aucun serveur ne se libère entre temps. Donner la notation de Kendall de cette nouvelle file.

2.2 Vérifier que l'on obtient exactement le même graphe que dans le cas précédent. En déduire que la distribution du nombre d'appels en cours, le nombre moyen d'appels et le temps moyen de réponse en régime permanent sont identiques dans chacun des deux cas.

2.3 D'un point de vue de la qualité de service ressentie par les utilisateurs, quel peut-être l'intérêt de cette deuxième solution ? On ne demande qu'un raisonnement qualitatif et non pas quantitatif.

PARTIE II Cas particulier : *C*=1

Pour essayer d'appréhender les différences entre les deux solutions, on va restreindre l'étude au cas où l'on n'a qu'un seul serveur *C*=1 et s'intéresser au temps d'attente. On note $\rho = \lambda/\mu$ la chargé et on la suppose inférieure strictement à 1.

1 En appliquant le théorème de Chang-Lavenberg (Loi de Little appliquée au serveur) et la propriété PASTA, vérifier que la probabilité qu'un client n'attende pas est indépendante de la discipline de service (du moment que le serveur ne reste pas inoccupé s'il y a un client dans la file) et qu'elle vaut :
$\Pr[W_{FCFS} = 0] = \Pr[W_{LCFS} = 0] = 1 - \rho$
On passera par une étape intermédiaire permettant de déterminer la probabilité que la file soit vide en régime permanent.
Ce critère n'est donc pas discriminant (il est d'ailleurs indépendant de la loi de la durée du service).

2 Repartons du cas FCFS. Rappeler la probabilité qu'il y ait k clients dans la file en régime permanent π_k. Rappeler également le temps moyen de réponse $E[R_{FCFS}]$ et le temps moyen d'attente $E[W_{FCFS}]$ en fonction de μ et de ρ. On ne demande aucun calcul ni justification. Ces résultats reposent sur l'application de la loi de Little qui ne permet malheureusement que d'obtenir le premier moment (la moyenne) de ces quantités.

3 Dans le cas FCFS, on va reprendre les calculs du temps d'attente en conditionnant cette durée par l'état du système à l'arrivée d'un client. Soit $\tilde{n}$ le nombre de clients dans la file quand un client arrive. On note $E[W_{FCFS} | \tilde{n} = k]$ le temps moyen d'attente quand à l'arrivée d'un client, il y a k clients dans la file.
Exprimer $E[W_{FCFS}]$ en fonction des $E[W_{FCFS} | \tilde{n} = k]$ et des π_k.
Déterminer $E[W_{FCFS} | \tilde{n} = k]$ en fonction de k et de μ. Retrouver le résultat de la question 1 de la partie II.

4 On peut alors déterminer les moments d'ordre supérieur.

4.1 Pour le moment d'ordre 2, exprimer $E[W_{FCFS}^2]$ en fonction des $E[W_{FCFS}^2 | \tilde{n} = k]$ et des π_k.

4.2 Pour déterminer $E[W_{FCFS}^2 | \tilde{n} = k]$, on va passer par le calcul de la variance de cette quantité. Les services étant indépendants et $Var(S) = \frac{1}{\mu^2}$, en déduire $Var[W_{FCFS} | \tilde{n} = k]$. Déterminer finalement $E[W_{FCFS}^2 | \tilde{n} = k]$.

4.3 En déduire que $E[W_{FCFS}^2] = \frac{2\rho}{\mu^2(1-\rho)^2}$. On rappelle que $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)\rho^k = \frac{2\rho}{(1-\rho)^3}$.

5 Plaçons-nous maintenant dans le cas LCFS. Dans la mesure où la chaîne est la même que celle du cas FCFS, les résultats de la question 1 de la partie II sont toujours valides (distribution du nombre d'appels en cours, temps moyen de réponse $E[R_{LCFS}] = E[R_{FCFS}]$ et d'attente $E[W_{LCFS}] = E[W_{FCFS}]$). La loi de Little ne permet toutefois pas d'aller au-delà.
On va procéder différemment. Une deuxième approche pour trouver le temps moyen d'attente consiste à considérer le cas d'un client particulier qui arrive dans le système. Le temps d'attente dans le système LCFS est la somme du temps résiduel de service vu par le client à son arrivée, plus la somme des temps de service de tous les clients qui arrivent pendant qu'il attend et qui seront par conséquent servis avant lui (on remarque que l'on ne tient pas compte des clients qui étaient en attente quand le client arrive car eux sont doublés).

5.1 Le service suivant une loi exponentielle et les arrivées étant poissonniennes, déterminer le temps moyen résiduel de service vu par un client quand la file n'est pas vide. En déduire le temps moyen résiduel de service vu par le client à son arrivée.

5.2 Comme il attend en moyenne $E[W_{LCFS}]$, déterminer le nombre moyen de clients qui arrivent pendant qu'il attend. En déduire le temps moyen nécessaire pour les écouler.

5.3 Retrouver le résultat de la question 1 de la partie II.

5.4 Pour le moment d'ordre l'application de cette technique est plus compliquée. La technique la plus couramment utilisée pour déterminer les moments d'ordre supérieur consiste à introduire la notion de période active ou « busy period » de la file. Une file d'attente (avec un serveur) alterne entre deux types de phases : des phases où la file est vide et où le serveur est au repos et des phases où la file n'est pas vide et où le serveur travaille jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de clients à servir.
Si on note E[V] la durée moyenne des périodes où le système est vide et E[B] la durée moyenne d'une période active, justifiez que :

$$\rho = \frac{E[B]}{E[V] + E[B]}$$

La période vide commence quand le dernier client s'en va et s'achève quand le client suivant arrive. En déduire E[V]. Déterminer finalement E[B] en fonction de μ et de ρ.

5.5 Examinons maintenant le cas de notre client qui arrive. Justifiez le fait que si ce client attend, il attendra l'équivalent d'une période active qui correspond au temps nécessaire pour terminer le service du client en service à son arrivée plus le temps nécessaire pour vider les clients qui arrivent pendant son attente.
En déduire que :

$$E[W_{LCFS}] = \rho E[B]$$

Retrouver le résultat précédent.

5.6 On peut alors trouver les moments d'ordre supérieur du temps d'attente en fonction des moments de la durée de la busy period. Exprimer le moment d'ordre 2 du temps d'attente en fonction du moment d'ordre 2 de la durée de la busy period.

6 Ces études des moments d'ordre supérieur conduisent à

$$E[W_{FCFS}^2] = (1-\rho)E[W_{LCFS}^2]$$

Conclure.

Corrigé FA12 1ère session – 20.04.07

Exercice

1. En sortie de chaque file, la somme des probas de transition est 1 :

$$r + p + (\Pi - 1)q = 1 \qquad (1)$$

2. La formule du cours $e_i = q_i + \sum_j e_j . \Gamma_{ji}$ s'écrit ici $e_i = \frac{1}{M} + e_i . p + \sum_{j \neq i} e_j . q$

   La symétrie $\Rightarrow \forall\, i,j \;\; e_i = e_j$

   $e_i(1 - p - (M-1)q) = \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \boxed{e_i = \frac{1}{r.M}}$ d'après (1)

3. On applique Jackson.

   Système stable $\Leftrightarrow \quad \forall i, \; \frac{\lambda . e_i}{\mu_i} < 1 \quad \Leftrightarrow \frac{\lambda}{r.M.\mu} < 1$

$$\boxed{M \geq \left[\frac{\lambda}{r.\mu}\right] + 1}$$

   [ ] = partie entière

4. Si stabilité, débit global = λ

$$E[L] = \sum_i \frac{\frac{\lambda . e_i}{\mu_i}}{1 - \frac{\lambda . e_i}{\mu_i}} = \frac{M.\lambda}{r.M.\mu - \lambda}$$

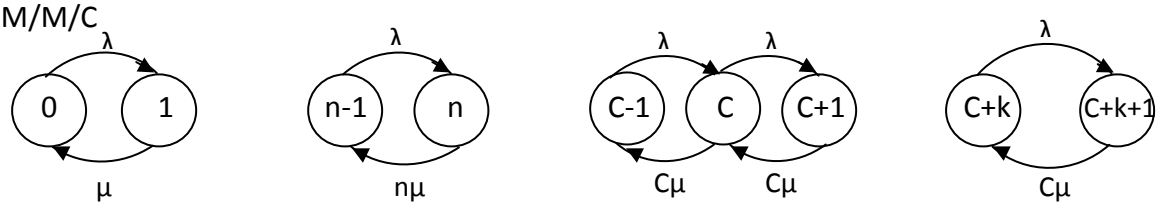
$$E[R] = \frac{M}{r.M.\mu - \lambda}$$

Problème : Disciplines de service

Partie I

1.1 M/M/C

1.2



1.3 et 1.4 voir poly M/M/m, remplacer m par C.

1.5 Celui qui est en (C+1) ème position sera pris en charge dès que l'un des C services en cours sera terminé. C'est l'inf. de C variables exponentielles de taux μ donc c'est une exponentielle de taux Cμ. Son espérance est $\frac{1}{C\mu}$. Celui qui est en position (C+k) sera pris en charge au bout de la somme de k durées qui sont des variables décrites précédemment donc d'espérance $\frac{k}{C\mu}$.

2.1 M/M/C/LCFS sans préemption.

2.2 On a le même graphe donc les mêmes probabilités d'état, la même condition de stabilité, les mêmes espérances de longueurs des files et le même temps de réponse.

2.3 Cette discipline peut permettre que quelqu'un qui arrive soit servi plus vite que si la discipline est LCFS. Par contre s'il n'est pas vite servi, il attendra beaucoup plus longtemps. Il a intérêt à raccrocher et à rappeler. L'avantage est que si quelqu'un obtient une réponse, il sera satisfait et répondra aimablement à la standardiste.

Partie II : C=1

1. PASTA indique que la loi d'arrivées est indépendante de l'état de la file. On est habitués à utiliser PASTA pour écrire que quand un client arrive la probabilité pour qu'il trouve une file pleine est la probabilité pour que la file soit pleine.
   Ici on utilise PASTA pour écrire que la probabilité pour que quand un client arrive il trouve une file vide est la probabilité pour que la file soit vide.
   Chang-Lavenberg → cette probabilité est $1-p$.
2. M/M/1 (FCFS) : $\Pi_k = p^k(1-p)$ $E[R] = \frac{1}{\mu-\lambda}$ $E[W] = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
3. $E[W_{FCFS}] = \sum_k \Pi_k \,.\, E[W_{FCFS}/\tilde{n}=k]$
   $E[W_{FCFS}/\tilde{n}=k] = \frac{k}{\mu}$ (d'après I.1.5)
   $E[W_{FCFS}] = \sum_k \frac{k}{\mu} p^k(1-p) = \frac{p(1-p)}{\mu}\sum_k kp^{k-1} = \frac{p}{\mu(1-p)}$
4. $E[W_{FCFS}^2] = \sum_k \Pi_k \, E[W_{FCFS}^2/\tilde{n}=k]$
   $Var[W_{FCFS}/\tilde{n}=k] = Var[\Sigma \text{ de k var indépendantes exp de tx } \mu]$
   $= k\, Var[S] = \frac{k}{\mu^2}$
   $E[W_{FCFS}^2/\tilde{n}=k] = Var[W_{FCFS}/\tilde{n}=k] - (E[W_{FCFS}/\tilde{n}=k])^2$
   $= \frac{k}{\mu^2} - (\frac{k}{\mu})^2 = \frac{k(k+1)}{\mu^2}$
   $E[W_{FCFS}^2] = \sum_k p^k (1-p)\frac{k(k+1)}{\mu^2} = \frac{2p}{\mu^2(1-p)^2}$

5.1. M/M/1 LCFS non préemptif
   $E[tps\ résiduel\ service/file\ non\ vide] = \frac{1}{\mu}$
   $E[tps\ résiduel\ service]$
   $= E[tps\ rés/file\ non\ vide].Proba(non\ vide) + 0.Proba(vide)$
   $= \frac{1}{\mu}p = \boxed{\frac{\lambda}{\mu^2}}$

5.2. Nombre moyen de clients arrivant pendant $W_{LCFS} = \lambda E[W_{LCFS}]$

Temps moyen pour écouler chacun d'eux : $\frac{1}{\mu}$

Temps moyen pour écouler ceux qui arrivent pendant l'attente W_{LCFS}=

$$\lambda E[W_{LCFS}] \times \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} E[W_{LCFS}]$$

$$E[W_{LCFS}] = E[Tps\ résiduel\ service] + E[Tps\ pr\ écouler\ ceux\ qui\ arrivent\ pdt\ attente]$$
$$= \frac{\lambda}{\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu} E[W_{LCFS}]$$

➔ $E[W_{LCFS}] = \frac{\lambda}{\mu^2(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

On trouve la même valeur que $E[W_{FCFS}]$ au 2.

5.4. Autre raisonnement : $p = \frac{E[B]}{E[V]+E[B]}$ $E[V] = \frac{1}{\lambda}$ → $E[B] = \frac{1}{\mu-\lambda}$

Si arrive pendant une période active restera en attente pendant la période active.

$$E[W_{LCFS}] = E[W_{LCFS}/arrive\ pendant\ B] \times ProbaActive + 0 \times Proba\ inactive$$
$$= E[B] \times p + 0 \times (1-e)$$
$$= \frac{p}{\mu-\lambda}$$

$$E[W_{LCFS}^2] = p\ E[B^2]$$

$$Var[W_{LCFS}] = p\ E[B^2] + p^2(E[B])^2$$
$$= p\ Var[B] + p\ (E[B])^2 - p^2(E[B])^2$$
$$= p\ Var[B] + p(1-p)\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}$$

$$Var[W_{LCFS}] = p\ Var[B] + \frac{p}{\mu^2(1-p)}$$

$$E[W_{FCFS}^2] = (1-p)\ E[W_{LCFS}^2]$$

<u>La variance de l'attente est plus forte pour LCFS alors que l'attente moyenne est la même.</u>

Contrôle FA12 2ème session
25-05-07
Monique Becker
(Aucun document autre qu'un poly de cours non annoté n'est autorisé.
Les polys d'exercices, calculettes et téléphones sont interdits.)

Question de cours : 4 points sur 20
- Expliquer la véritable signification de PASTA
- Donner un exemple d'application pour une file à capacité limitée
- Donner un exemple d'un cas où PASTA ne s'applique pas
- Expliquer en quoi on applique PASTA lorsque pour une file à un serveur LIFO sans préemption on calcule la probabilité pour qu'un client n'attende pas

Problème 1 : 10 points sur 20
On veut dimensionner une salle de TP avec une imprimante.
On considère N terminaux.
On suppose que le temps séparant le moment où un élève a fini d'imprimer et le moment où lui ou un autre élève utilisant le même terminal lance l'impression suivante est réparti exponentiellement de moyenne Z.
On suppose que la durée d'une impression est répartie exponentiellement de moyenne S.
Les applications numériques seront faites pour N=5, S= 1mn, Z = 3 mn.

- Expliquer pourquoi on va utiliser un modèle fermé. Donner le principe général de la méthode.
- Montrer **avec rigueur** que le nombre d'impressions visibles dans la file d'impression, (c'est-à-dire en attente de l'imprimante ou en train d'être imprimées) est un processus de Markov. Faire un schéma de cette chaîne. Indiquer les taux de transitions entre états. (Pour cela on sera amené à démontrer un lemme sur l'inf de k lois exponentielles. La démonstration est requise.)
- Etudier la convergence de cette chaîne.
- Calculer les probabilités d'états.
- Calculer le taux d'utilisation de l'imprimante.
- Calculer le débit des impressions
- Calculer l'espérance du temps de réponse de l'imprimante
- Quel théorème concernant la modélisation des réseaux fermés aurait-on pu appliquer ?
- Retrouver les résultats que vous avez obtenus précédemment, en appliquant l'algorithme de Reiser.
- A partir de quelle valeur de N considéreriez vous qu'il faut acheter une deuxième imprimante ?

Problème 2 : 6 points sur 20

On considère un réseau comportant M liens d'entrée, un commutateur et N liens de sortie. Il arrive λ paquets par unités de temps. Les paquets arrivant sont répartis de façon équiprobable entre les **M** liens d'entrée de débits **D** octets/s, puis sont traités par un commutateur S, puis sont envoyés sur les **N** liens de sortie de débits **D'** octets/s. Les paquets ont une longueur moyenne $\boldsymbol{l}$

On place en amont des liens d'entrées et de sorties, des buffers (tampons) évitant la perte des paquets.

On suppose que les paquets sont envoyés par un grand nombre de sources indépendantes et de mêmes débits.

On suppose aussi que le destination des paquets est équidistribuée.

On fera l'approximation que les longueurs des paquets sont exponentiellement réparties. Pourquoi est-ce une approximation ?

Données numériques :

$\lambda = 100$ paquets/s

$\boldsymbol{l} = 16$ K bits

D = 600 Koctets/s

M = 4

D' = 800 Koctets/s

N = 3

On suppose que le temps de traitement par le commutateur pour un bit est 10^{-6} s

- Faire un schéma du modèle du système considéré
- Déterminer le goulot d'étranglement.
- On change le type de commutateur pour qu'il soit dix fois plus rapide. Quel est le nouveau goulot d'étranglement ?
- Quel théorème peut-on appliquer pour modéliser l'ensemble ?
- Pour des M et N beaucoup plus grands, auriez vous une idée d'une méthode à utiliser qui permettrait de faire les calculs rapidement.
- Si on supprime les tampons indiquer la méthode à utiliser pour calculer les pertes.